Leçons : 108
122

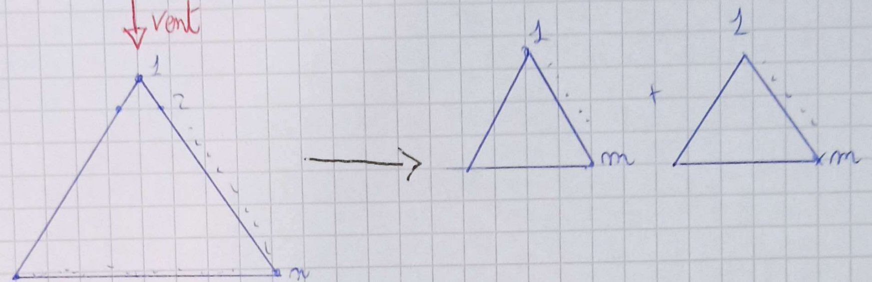
Réf : ?

Développement : Le problème des canards
(Inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$)

(Pour approfondir, voir "Théorème des unités de Dirichlet")

Base du problème : n rangées de canards arrangées en triangle volent dans le ciel. Une bourrasque sépare le groupe de canards en deux groupes de même forme, avec m rangées. Quand cette situation est-elle possible ? ($n, m \in \mathbb{N}$)

Schéma :



Résolution : Vu que #(canards avant) = #(canards après),

on a $$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}$$

qui se réarrange en $n^2 + n = 2m^2 + 2m$. On reconstruit un carré en faisant $\times 4$:

$4n^2 + 4n = 2(4m^2 + 4m) \iff (2n+1)^2 = 2(2m+1)^2 - 1$

$\iff \left(2n+1 + \sqrt{2}(2m+1)\right)\left(2n+1 - \sqrt{2}(2m+1)\right) = -1$ (noté $*$)

En posant $z = 2n+1 + \sqrt{2}(2m+1)$, on cherche donc à résoudre $z\bar{z} = -1$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. On définit clairement les notations :

- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pour $z = a + b\sqrt{2}$, on définit $\bar{z} := a - b\sqrt{2}$, et $N(z) := z\bar{z} = a^2 - 2b^2$.

Propriété 1 : $N(z_1 z_2) = N(z_1) N(z_2)$ (car $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$)

Ceci permet de caractériser les inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. En effet, soit u un inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Il existe $v \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $uv = 1$.

$\Rightarrow N(uv) = N(1)$ donc $N(u)N(v) = 1$.

Mais $N(z) = a^2 - 2b^2 \Rightarrow N(z) \in \mathbb{Z}$ $\forall z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Donc $N(u) = \pm 1$, c'est à dire $a^2 - 2b^2 = \pm 1$. Les inversibles z vérifient donc $N(z) = \pm 1$. Réciproquement, si $N(z) = \pm 1$, $(\pm z\bar{z}) = \pm(\pm 1) = 1$.

Donc $N(z) = \pm 1 \iff z$ est inversible (d'inverse $\pm\bar{z}$)

Deuxième partie : On caractérise ici les inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ qualitativement. On va montrer que ce groupe est monogène en exploitant l'inversible fondamental.

En partant de $a^2-2b^2=-1$, on trouve comme solution >1 et minimale $1+\sqrt{2}=\omega$.

Fait : ω est le plus petit inversible >1. En effet, soit $u\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ inversible avec $1<u\leq\omega$. Notons $u=a+b\sqrt{2}$. Vu que $u\bar{u}=1$, $-1<\bar{u}<1$, càd $-1<a-b\sqrt{2}<1$.

En sommant on a $\quad 0<2a<2+\sqrt{2}$ donc $\quad 0<a\leq 1+\sqrt{2}$

Vu que a est entier, $a=1$ ou $a=2$. $a=2$ est impossible $(4-2b^2=-1)$

Donc $a=1$, et finalement $b=1$ donc $u=\omega$.

Fait : On note $\mathbb{U}^+(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ qui sont ≥ 1.

Alors $\mathbb{U}^+(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])=\{\omega^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ (monogène, trop bien !!)

Démo : Soit $u\in\mathbb{U}^+(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$. Vu que $\omega^n\xrightarrow[+\infty]{}+\infty$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\omega^n<u\leq\omega^{n+1}$. Alors $1<u\omega^{-n}\leq\omega$.

Mais :
- ω est inversible donc ω^{-n} est inversible. u est inversible donc $u\omega^{-n}$ est inversible.
- $1<u\omega^{-n}\leq\omega$ avec $u\omega^{-n}$ inversible donc si $u\omega^{-n}\neq\omega$ on contredit la minimalité de ω. Donc $u=\omega^{n+1}$! Donc u s'écrit ω^k.

Troisième partie : On exploite ces résultats pour obtenir des solutions entières de $(*)$.

Vu que $N(\omega)=-1$, $N(\omega^k)=N(\omega)^k=(-1)^k$. Les termes pairs donnent donc des solutions de $a^2-2b^2=+1$ ce qui ne nous intéresse pas. Les solutions sont donc obtenues pour k impair.

On va regarder $(1+\sqrt{2})^{2k+1}$ en tant qu'élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, sous la forme $(a_k+b_k\sqrt{2})$

- $k=1$: $(1+\sqrt{2})^1=1+\sqrt{2}$. En comparant avec $(*)$ on a $\begin{cases}2n+1=1\\2m+1=1\end{cases}$, $n=0$, $m=0$
- $k=3$: $(1+\sqrt{2})^3=7+5\sqrt{2}$, donc $\begin{cases}2n+1=7\\2m+1=5\end{cases}$ donne $n=3$, $m=2$.
- $k=5$: $(1+\sqrt{2})^5=41+29\sqrt{2}$ donc $n=20$, $m=14$. etc... (écrire le binôme de Newton)

Ouverture du dev : Il faut donc écrire $(1+\sqrt{2})^n=a_n+\sqrt{2}b_n$, $a_n,b_n\in\mathbb{Z}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Pour déterminer a_n et b_n, on les caractérise en disant que $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+2b_n\\b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$

Donc $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$. On note $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

car $a_0=1$, $b_0=0$. On diagonalise A, de v.p. $(1\pm\sqrt{2})$, pour avoir $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=PD^nP\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Une fois cette écriture obtenue, les solutions à $(*)$ sont obtenues par $n=\frac{a_n-1}{2}$ et $m=\frac{b_n-1}{2}$.

Fini !